

ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRONG BÀI TOÁN CÂN BẰNG KINH TẾ

● LƯƠNG VĂN LONG - PHẠM VĂN NGHĨA - NGUYỄN HỒNG NHẬT - MAI CẨM TÚ

TÓM TẮT:

Bài viết nghiên cứu việc ứng dụng bất đẳng thức biến phân trong bài toán cân bằng kinh tế, nhằm thiết lập các kết quả tồn tại và tính duy nhất mới của các bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp theo các giả định chung và trình bày mô hình cân bằng kinh tế cạnh tranh hoàn hảo đáp ứng các giả định này. Từ kết quả nghiên cứu, bài viết phát triển các phương pháp giải hiệu quả cho các bài toán cân bằng kinh tế.

Từ khóa: bất đẳng thức biến phân, cân bằng kinh tế, điểm cân bằng.

1. Đặt vấn đề

Các bất đẳng thức biến phân (Variational Inequalities) được biết đến là một công cụ rất hữu ích để xây dựng và khảo sát các vấn đề cân bằng kinh tế khác nhau. Đặc biệt, chúng cho phép người ta thu được các kết quả tồn tại và duy nhất 1 nghiệm và xây dựng các phương pháp giải lập để tìm điểm cân bằng. Các kết quả chung nhất được thiết lập cho trường hợp ánh xạ chi phí của bất đẳng thức biến phân tương ứng là nhiều giá trị. Đồng thời, công thức đơn giá trị cho phép người ta đơn giản hóa các câu lệnh quan trọng và suy ra các kết quả này so với các công thức trong trường hợp đa giá trị. Đây cũng là trường hợp xây dựng các phương pháp giải lập. Tuy nhiên, một công thức như vậy bao hàm 1 lớp hẹp các vấn đề cân bằng trong kinh tế học.

Bất đẳng thức biến phân thông thường thừa nhận nhiều sửa đổi và mở rộng khác nhau về nguyên tắc cũng có thể được áp dụng cho các bài toán cân bằng kinh tế. Bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp (*Mixed Variational Inequality*) là đi tìm một điểm $x^* \in K$ sao cho:

$$[F(x^*), x - x^*] + f(x) - f(x^*) \geq 0, \forall x \in K \quad (1.1)$$

Trong đó, K là 1 tập lồi, khác rỗng trong không gian Euclide thực $\mathbb{R}^n$, $F: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ là 1 ánh xạ, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ là 1 hàm lồi, nhưng không nhất thiết phải khả vi và V là 1 tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$ sao cho $K \subseteq V$.

Vấn đề (1.1) ban đầu được Lescarret và Browder xem xét liên quan đến nhiều ứng dụng của nó trong vật lý, toán học và sau đó được nhiều tác giả nghiên cứu. Nó trở thành bất đẳng thức biến phân thông thường (đơn giá trị) nếu $f \equiv 0$ và bài toán tối ưu hóa lồi thông thường nếu $F \equiv 0$. Vì vậy, nó có thể được coi là một vấn đề trung gian giữa các bất đẳng thức biến phân đơn giá trị và đa giá trị. Hầu hết các công trình theo truyền thống dành cho trường hợp F sở hữu một số thuộc tính đơn điệu mạnh nhất định, cho phép người ta đưa ra các kết quả tồn tại và duy nhất khác nhau cho vấn đề (1.1) và đề xuất các phương pháp giải khác nhau. Tuy nhiên, các thuộc tính này có vẻ quá hạn chế đối với các ứng dụng kinh tế, khi sử dụng các điều kiện tính đơn điệu. Vì lý do này, chúng tôi sẽ xem xét vấn đề (1.1) dưới các giả thiết khác. Cụ thể, chúng tôi sẽ giả sử rằng ánh xạ chi phí F sở hữu các thuộc tính

kiểu P, K được xác định bởi các ràng buộc kiểu hợp. Từ đó chúng tôi đưa ra các kết quả về sự tồn tại và tính duy nhất mới cho (1.1) theo các giả định yếu hơn về F phù hợp với các ứng dụng kinh tế của nó.

Một số ký hiệu và định nghĩa: $x +$

Cho $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$x \geq 0$ (tức là $x_i \geq 0, \forall i$)

$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0\}$

$\mathbb{R}_>^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x > 0\}$

Với: ln là ánh xạ đồng nhất trong $\mathbb{R}^n$; mỗi tập E , $\Pi(E)$ là họ tất cả các tập con của E ; $\partial f(x)$ là vi phân dưới của hàm f tại x :

$\partial f(x) = \{g \in \mathbb{R}^n | f(y) - f(x) \geq (g, y - x), \forall y \in \mathbb{R}^n\}$

Định nghĩa 1.1. Cho U là tập lồi trong $\mathbb{R}^n$. Hàm $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là:

a) Lồi mạnh với hằng số $\tau > 0$ nếu mọi $u_1, u_2 \in U$ và $\lambda \in [0; 1]$, ta có:

$$f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) < \lambda f(u_1) + (1 - \lambda)f(u_2) - 0,5\tau\lambda(1 - \lambda)\|u_1 - u_2\|^2$$

b) Lồi chặt, nếu mọi $u_1, u_2 \in U, u_1 \neq u_2, \lambda \in (0; 1)$, ta có:

$$f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) < \lambda f(u_1) + (1 - \lambda)f(u_2)$$

c) Lồi nếu $u_1, u_2 \in U, \lambda \in [0; 1]$, ta có:

$$f(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2) \leq \lambda f(u_1) + (1 - \lambda)f(u_2)$$

Hàm số $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là lõm (lõm chặt, lõm mạnh với hằng số $\tau > 0$) nếu hàm $-f$ là lồi (lồi chặt, lồi mạnh với hằng số $\tau > 0$).

Định nghĩa 1.2. Giả sử U là một tập con lồi trong không gian $\mathbb{R}^n$. Hàm $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ được gọi là:

a) Đơn điệu mạnh trên K nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho:

$$\langle qF(x) - F(y), x - y \rangle \geq \delta \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in K$$

b) Đơn điệu trên K nếu:

$$\langle qF(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in K$$

c) Đơn điệu chặt trên K nếu:

$$\langle qF(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in K, x \neq y$$

Định nghĩa 1.3. Một hàm $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ là:

a) lồi khi và chỉ khi ∂f là đơn điệu

b) lồi chặt khi và chỉ khi ∂f là đơn điệu chặt

c) lồi mạnh với hằng số $\tau > 0$ khi và chỉ khi ∂f là đơn điệu mạnh với hằng số $\tau > 0$

2. Mô hình cân bằng kinh tế

Trong phần này, chúng tôi trình bày ngắn gọn mô hình cân bằng kinh tế có thể được xây dựng dưới dạng bất đẳng thức biến phân (1.1). Lưu ý

rằng mô hình liên quan đến khả năng người sản xuất thay đổi công nghệ sản xuất.

Mô hình cân bằng Walrasian. Chúng tôi coi một cấu trúc thị trường với sự cạnh tranh hoàn hảo. Mô hình kinh doanh n mặt hàng. Khi đó, với một vectơ giá $p \in \mathbb{R}_+^n$, chúng ta có thể xác định giá trị $E(p)$ của ánh xạ dư cầu $E: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^n)$ nói chung là đa trị. Theo truyền thống một vectơ $p^* \in \mathbb{R}^n$ được cho là một vectơ giá cân bằng nếu nó giải quyết vấn đề sau:

$$p^* \geq 0, \exists q^* \in E(p^*): q^* \leq 0, \langle q^*, p^* \rangle = 0$$

Điều này tương đương với bất đẳng thức biến phân:

$$\text{Tìm } p^* \geq 0 \text{ sao cho: } \exists q^* \in E(p^*),$$

$$\langle -q^*, p - q^* \rangle \geq 0 \quad \forall p \geq 0$$

Bây giờ, chuyên biệt hóa mô hình của chúng tôi từ mô hình rất chung chung này. Đầu tiên, chúng tôi giả sử rằng, mỗi mức giá của hàng hóa tham gia vào cấu trúc thị trường có giới hạn dương thấp hơn và có thể có giới hạn trên. Theo đó, các mức giá khả thi được giả định nằm trong hộp được xác định bởi:

$$K = \prod_{i=1}^n K_i,$$

$$K_i = \{t \in \mathbb{R} | 0 < \tau_i' \leq t \leq \tau_i'' \leq +\infty\},$$

$$i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

Tiếp theo, như thường lệ, ánh xạ dư cầu được biểu diễn như sau: $E(p) = D(p) - S(p)$

Trong đó, D và S lần lượt là ánh xạ cầu và cung. Chúng tôi giả sử ánh xạ cầu là đơn trị và đặt $F = -D$. Khi đó, bài toán tìm giá cân bằng được xây dựng như sau: tìm $p^* \in K$ sao cho:

$$\begin{aligned} \exists s^* \in S(p^*), \langle G(p^*), p - p^* \rangle \\ + \langle s^*, p - p^* \rangle \geq 0 \quad \forall p \in K \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ngoài ra, chúng tôi áp đặt điều kiện rằng mỗi nhà sản xuất cung cấp một loại hàng hóa duy nhất. Điều kiện này dường như không quá hạn chế. Rõ ràng, không có gì mất đi tính tổng quát khi giả sử rằng mỗi nhà sản xuất thứ j cung cấp hàng hóa thứ j duy nhất, $j = 1, \dots, n$. Khi đó, cho trước vectơ giá $p \in \mathbb{R}_+^n$, ánh xạ cung có dạng $S(p^*) = \prod_{i=1}^n S_i(p_i)$. Tiếp theo, khá tự nhiên khi giả sử rằng mỗi S_i là đơn điệu, nhưng không nhất thiết là đơn trị, tức là $S_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \Pi(\mathbb{R}), i = 1, \dots, n$. Trên thực

tế, những giả định này khá chuẩn ngay cả đối với ánh xạ cung. Ở đây, chúng có nghĩa là cung riêng lẻ không giảm theo giá và tồn tại các mức giá ngụy nhiều hơn 1 giá trị sản xuất tối ưu, những mức giá này được coi là điểm chuyển đổi giữa các công nghệ sản xuất khác nhau.

Theo các giả thiết trên, mỗi ánh xạ cung là vi phân dưới, tức là, $S_j = \partial f_j$, trong đó $f_j: \mathbb{R}_+ \rightarrow \Pi(\mathbb{R})$, $j = 1, \dots, n$ là 1 hàm lồi. Do đó (2.2), (2.1) của chúng ta được viết lại như sau:

Tìm $p^* \in K$, sao cho:

$$\exists s_i^* \in S_i(p_i^*), i = 1, \dots, n; \langle F(p^*), p - p^* \rangle + \sum_{i=1}^n s_i^*(p_i - p_i^*) \geq 0 \quad \forall p \in K \quad (2.3)$$

Hoặc tương đương:

$$\langle F(p^*), p - p^* \rangle + \sum_{i=1}^n [f_i(p_i) - f_i(p_i^*)] \geq 0 \quad \forall p \in K \quad (2.4)$$

Tuy nhiên, vấn đề này không gì khác (1.1). Hơn nữa, chúng ta có thể sử dụng cùng một vấn đề (2.4) để mô hình hóa trường hợp tổng quát hơn, trong đó cấu trúc thị trường liên quan đến người tiêu dùng bổ sung với ánh xạ cầu hàng hóa đơn lẻ không tăng. Khi đó, S_i đóng vai trò như 1 ánh xạ dư cung một phần cho hàng hóa thứ i .

3. Sơ bộ kỹ thuật

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa và đưa ra một số tính chất sẽ được sử dụng trong nghiên cứu tiếp theo của chúng tôi. Chúng tôi xem xét (1.1) theo các giả định sau:

GT1: $F: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ là ánh xạ liên tục và V là tập con lồi của $\mathbb{R}^n$.

GT2: $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$, trong đó, $f_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi, liên tục với $\forall i = 1, 2, \dots, n$

GT3: K là 1 tập hợp giới hạn hợp, nghĩa là:

$$K = \prod_{i=1}^n K_i,$$

Trong đó: $K_i = \{t \in \mathbb{R} | \alpha_i \leq t \leq \beta_i\}$,

$[\alpha_i, \beta_i] \subseteq [0, +\infty]$ với mọi $i = 1, \dots, n$

Định nghĩa 3.2. Một ma trận A cấp $n \times n$, được gọi là:

- a) P - ma trận nếu nó có các phần tử chính dương
- b) P_0 - ma trận nếu nó có các phần tử chính không âm
- c) Z - ma trận nếu nó có phần tử ngoài đường chéo không âm
- d) M - ma trận nếu các phần tử ngoài đường chéo không âm và tồn tại ma trận nghịch đảo có các phần tử không âm.

Ta có một ma trận A cấp $n \times n$ là P - ma trận khi và chỉ khi với mọi vectơ $x \neq 0$, tồn tại chỉ số k sao cho $x_k y_k > 0$, trong đó $y = Ax$. Tương tự, A là P_0 - ma trận khi và chỉ khi với mọi vectơ x , tồn tại chỉ số k sao cho $x_k y_k \geq 0$, $x_k \neq 0$, trong đó $y = Ax$. Ngoài ra, ma trận A là M - ma trận khi và chỉ khi $A \in P \cap Z$. Do đó, mỗi M - ma trận là P - ma trận, nhưng khẳng định ngược lại nói chung không đúng.

Định nghĩa 3.4. Giả sử A là Z - ma trận. Nếu tồn tại vectơ $x > 0$ sao cho $Ax > 0$ ($Ax \geq 0$) thì A là M - ma trận (M_0 - ma trận).

Định nghĩa 3.5. Cho U là một tập con lồi của $\mathbb{R}^n$. Một ánh xạ $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ được gọi là:

- (a) P - ánh xạ nếu $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) > 0$ với $\forall x, y \in U, x \neq y$;
- (b) P - ánh xạ chặt nếu tồn tại $\gamma > 0$ sao cho $F - \gamma I_n$ là P - ánh xạ;
- (c) P - ánh xạ đều nếu tồn tại $\tau > 0$ sao cho $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) > \tau \|x - y\|^2$ với $\forall x, y \in U$;
- (d) P_0 - ánh xạ nếu $\forall x, y \in U, x \neq y$ tồn tại một chỉ số sao cho $x_i \neq y_i$ và $(x_i - y_i)(F(x_i) - F(y_i)) \geq 0$.

Thực tế, nếu F là affine, nghĩa là $F(x) = Ax + b$, thì F là P - ánh xạ (P_0 - ánh xạ) khi và chỉ khi Jacobian $\nabla F(x) = A$ của nó là P - ma trận (P_0 - ma trận). Trong trường hợp phi tuyến tổng quát, nếu Jacobian $\nabla F(x)$ là P - ma trận thì F là một P - ánh xạ, nhưng nói chung khẳng định ngược lại không đúng. Đồng thời, F là P_0 - ánh xạ khi và chỉ khi Jacobian $\nabla F(x)$ của nó là P_0 - ma trận. Tiếp theo, nếu F là một P - ánh xạ chặt, thì Jacobian của nó là một P - ma trận. Hơn nữa, nếu ánh xạ đơn giá trị $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ là đơn điệu (đơn điệu chặt, đơn điệu mạnh) thì nó là một P_0 - ánh xạ (P - ánh xạ, P - ánh xạ đều), nhưng các khẳng định ngược lại nói chung là không đúng.

Bổ đề 3.6 Nếu $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ là P_0 - ánh xạ thì $\forall \varepsilon > 0, F + \varepsilon I_n$ là P - ánh xạ.

4. Kết quả tồn tại và tính duy nhất nghiệm
Trong mục này, chúng tôi xét bất đẳng thức biến phân hỗn hợp (1.1) đi kèm với các giả thiết GT1, GT2, GT3.

- Mệnh đề 4.1:*
(i) Nếu F là P - ánh xạ thì (1.1) có ít nhất một nghiệm.
(ii) Nếu F là P - ánh xạ chặt thì (1.1) có nghiệm duy nhất.

Tuy nhiên, các giả định về F trong mệnh đề 4.1 dường như quá hạn chế đối với các vấn đề cân bằng kinh tế. Nói chung P - ánh xạ không cần phải chặt. Bây giờ chúng tôi trình bày các kết quả tồn tại và tính duy nhất mới dưới các giả thiết yếu hơn về F . Ý tưởng cơ bản bao gồm việc thay thế tính chất chặt của F bằng tính lồi chặt (mạnh) của f . Chúng ta bắt đầu xem xét từ trường hợp đơn giản nhất, trong đó K là bị chặn và F chỉ thỏa mãn GT1.

Mệnh đề 4.2. Giả sử K là tập bị chặn. Khi đó (1.1) có nghiệm.

Hệ quả 4.3. Cho F là P - ánh xạ và K là tập bị chặn. Khi đó (1.1) có nghiệm duy nhất.

Kết quả về tính duy nhất sau đây cũng minh họa sự phụ thuộc giữa các thuộc tính của F và f nếu chúng ta so sánh nó với mệnh đề 4.1 (i).

Định lý 4.4. Cho F là P_0 - ánh xạ và f_i là lồi chặt với mọi $i = 1, \dots, n$. Khi đó (1.1) có ít nhất một nghiệm.

Hệ quả 4.5. Ngoài các giả thiết của Định lý 4.4, giả sử rằng K là tập bị chặn. Khi đó (1.1) có nghiệm duy nhất.

Bây giờ chúng tôi trình bày một kết quả tồn tại và duy nhất trên các tập hợp không bị ràng buộc trong điều kiện P_0 .

Định lý 4.6. Cho F là P_0 - ánh xạ và f_i là hàm lồi mạnh với mỗi $i = 1, \dots, n$. Khi đó (1.1) có nghiệm duy nhất.

Do đó, có thể thu được kết quả tồn tại và tính duy nhất nghiệm nếu chúng ta thay thế (chặt) các thuộc tính P của ánh xạ chi phí F bằng các thuộc tính lồi mạnh của tất cả các hàm f_i . Tuy nhiên, nếu ngay cả một phần của F sở hữu các thuộc tính P (chặt) như vậy, chúng ta có thể thu được kết quả

tương tự trong trường hợp các hàm f_i sở hữu các thuộc tính mạnh.

Cho tập chỉ số $L = \{1, \dots, l\}$, chúng ta viết $x_L = (x_i)_{i \in L}$ và $A_L(x) = \nabla_{x_L} F_L(x)$. Do đó, $A_n(x) = \nabla F(x)$. Trước tiên, chúng tôi đưa ra kết quả về sự tồn tại và tính duy nhất cho các tập hợp không bị chặn.

Định lý 4.7. Cho F là một P_0 - ánh xạ khả vi. Giả sử với mỗi $x \in K, \nabla F(x)$ là Z -ma trận và tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $A_k(x) - \varepsilon I_k$ là một P - ma trận với mỗi k cố định, và cũng giả sử $f_i, i = k + 1, \dots, n$ là hàm lồi mạnh, đồng thời K bị chặn. Khi đó (1.1) có nghiệm duy nhất.

Định lý 4.8. Cho F là một P_0 - ánh xạ khả vi. Giả sử rằng, với mọi $x \in K, \nabla F(x)$ là Z - ma trận Z và $A_k(x)$ là P - ma trận, với k cố định. Cũng giả sử $f_i, i = k + 1, \dots, n$ là các hàm lồi mạnh và K bị chặn. Khi đó (1.1) có nghiệm duy nhất.

5. Ứng dụng vào mô hình cân bằng Walrasian

Bây giờ, chúng ta xét các kết quả ở trên cho mô hình Walrasian. Để tiện theo dõi, chúng tôi viết lại mô hình. Tìm $p^* \in K$ sao cho:

$$\langle F(p^*), p - p^* \rangle + \sum_{i=1}^n [f_i(p_i) - f_i(p_i^*)] \geq 0 \quad \forall p \in K \quad (5.1)$$

Trong đó:

$$K = \prod_{i=1}^n K_i, K_i = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 < \tau_i' \leq t \leq \tau_i'' < +\infty\}, \\ i = 1, \dots, n \quad (5.2)$$

τ_i' và τ_i'' là giới hạn trên và dưới của giá hàng hóa thứ i .

Chúng ta cũng nhớ lại rằng $D = -F$ là ánh xạ cầu, $S_i = \partial F_i$ là ánh xạ cung của nhà sản xuất thứ i được giả sử là đơn điệu, do đó f_i lồi, nhưng không nhất thiết phải khả vi. Ngoài ra, ta đặt $V = \mathbb{R}^n$ và giả sử rằng $F: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ là liên tục. Rõ ràng, $f_i, i = 1, \dots, n$, cũng liên tục trên V . Do đó, bài toán của chúng ta khi đó thỏa mãn tất cả các giả thiết GT1, GT2 và GT3. Vì lý do này, chúng ta có thể thiết lập kết quả tồn tại đầu tiên trực tiếp từ Mệnh đề 4.2.

Mệnh đề 5.1. Nếu $\tau_i'' < +\infty$ với mỗi i thì (5.1) có nghiệm.

Để áp dụng các kết quả khác từ phần 4 cho vấn

đề (5.1), chúng ta phải áp đặt các điều kiện bổ sung nhất định đối với F và f_i phải phù hợp với hành vi kinh tế thường được chấp nhận.

Định nghĩa 5.2. Một ánh xạ $Q: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ được gọi là:

(a) thỏa mãn tính chất thay thế nếu

$$\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \geq 0, \quad i \neq j;$$

(b) là đồng nhất dương bậc m ,

$$\text{nếu } Q(\alpha x) = \alpha^m Q(x) \text{ với } \forall \alpha \geq 0.$$

Khả năng thay thế của cầu là một trong những điều kiện phổ biến nhất đối với cấu trúc thị trường. Có nghĩa là tất cả các hàng hoá trên thị trường đều có thể thay thế được theo nghĩa là nếu giá của hàng hoá thứ i tăng lên thì cầu của các hàng hoá khác không giảm. Tiếp theo, mức độ đồng nhất dương của cầu cũng là một điều kiện tiêu chuẩn. Vì lý do này, trong suốt phần này, chúng ta sẽ giả sử rằng ánh xạ cầu D liên tục khả vi, đồng nhất dương bậc 0 và sở hữu thuộc tính thay thế. Từ khả năng thay thế của D , nó theo sau rằng:

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_j} \leq 0, \quad i \neq j; \quad (5.3)$$

Do đó, $\nabla F(p)$ là Z - ma trận. Tiếp theo, vì $F_i(p)$ là thuần nhất bậc 0, nó tuân theo định lý Euler:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(p)}{\partial p_j} p_j = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (5.4)$$

Áp dụng mệnh đề 3.4, chúng tôi kết luận rằng: $\nabla F(p)$ là M_0 - ma trận, do đó F cũng là P_0 - ánh xạ, và vì vậy chúng tôi đã thu được các khẳng định sau.

Bổ đề 5.3.

(i) F là P_0 - ánh xạ

(ii) $\nabla F(p)$ là M_0 - ma trận với mỗi $p \in V$.

Lưu ý (5.3) ngụ ý rằng F không thể là P - ánh xạ P (chặt), do đó các kết quả của mệnh đề 4.1 không áp dụng được trong trường hợp này. Đồng thời, chúng tôi không cho rằng ánh xạ cung là đồng nhất, mặc dù điều kiện này khá bình thường đối với hầu hết các mô hình cân bằng kinh tế đã biết. Nếu đúng như vậy, thì bằng cách sử dụng kỹ thuật tiêu chuẩn để ấn định giá của hàng hóa thứ n , tức là đặt, người ta có thể coi ánh xạ rút gọn (chuẩn hóa) $\bar{F}: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, được xác định bởi $\bar{F}(p) = F(p_1, \dots, p_{n-1}, 1)$, có Jacobian là M - ma trận nếu

cột thứ n của $F(p)$ chỉ chứa các phần tử âm. Do đó, trong trường hợp này, giá của hàng hóa thứ n , có thể là tùy ý trong mô hình ban đầu, tức là tiền là trung lập trong mô hình đó. Điều đó cũng có nghĩa là cả cung và cầu đều không phụ thuộc vào mức giá. Do đó, sự đồng nhất của cả cung và cầu ngụ ý các thuộc tính loại P bổ sung của ánh xạ chi phí. Chúng tôi dự định xây dựng mô hình của mình theo các giả định yếu hơn với sự trợ giúp của các kết quả của phần 4 và tiền không cần phải là trung lập trong mô hình của chúng tôi.

Mệnh đề 5.4.

(i) Cho K là tập bị chặn và $f_i, i = 1, \dots, n$, là lồi chặt. Khi đó (5.1) có nghiệm duy nhất.

(ii) Cho $f_i, i = 1, \dots, n$, là lồi mạnh. Khi đó (5.1) có nghiệm duy nhất.

Theo bổ đề 5.3, các chứng minh của khẳng định (i) và (ii) bây giờ tương ứng tuân theo hệ quả 4.5 và định lý 4.6.

Chúng ta nhớ lại rằng, do bổ đề 1.3, tính lồi chặt (mạnh) của f_i tương đương với tính đơn điệu chặt (mạnh) của ánh xạ cung thứ i $S_i = \partial f_i$. Mặc dù F không cần phải là một P - ánh xạ P (chặt), nó có thể có các tính chất như vậy. Trong trường hợp này, chúng ta có thể áp dụng định lý 4.7 và 4.8 cho bài toán của mình.

Mệnh đề 5.5. Giả sử tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $p \in K$, $A_{n-1}(p) - \varepsilon I_{n-1}$ là M ma trận và f_n lồi mạnh. Khi đó (5.1) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh được suy ra từ định lý 4.7. Chúng ta có thể đặc biệt hóa kết quả ở trên cho trường hợp bị chặn.

Mệnh đề 5.6. Giả sử rằng K bị chặn, với mọi $p \in K$, $A_{n-1}(p)$ là M - ma trận và f_n lồi mạnh. Khi đó (5.1) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh được suy ra từ định lý 4.8. Bây giờ chúng tôi đưa ra các bổ sung về các điều kiện đủ để (5.1) có nghiệm duy nhất.

Định lý 5.7. Giả sử K bị chặn và với mọi $p \in K$, f_n lồi mạnh và

$$\frac{\partial F_j(p)}{\partial p_i} < 0, \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \quad (5.5)$$

Khi đó (5.1) có nghiệm duy nhất

Chứng minh:

Theo (5.3), (5.4) và (5.5) ta có:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F_i(p)}{\partial p_j} p_j > \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F_i(p)}{\partial p_j} p_j > \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(p)}{\partial p_j} p_j = 0, \\ i = 1, \dots, n-1 \quad (5.6)$$

Do đó, $A_{n-1}(p)$ là một M - ma trận.

Theo mệnh đề 4.6 thì (5.1) có nghiệm duy nhất.

Xét trường hợp các hàm f_i , $i = 1, \dots, n$, không lỗi mạnh nhưng K bị chặn và (5.5) giữ nguyên. Khi đó, chúng ta có thể thay thế ánh xạ chi phí F trong (5.1) bằng $F^{(\varepsilon)}$, có các thành phần được xác định bởi:

$$F^{(\varepsilon)} = \begin{cases} F_i(p), & \text{nếu } i < n \\ F_i(p) + \varepsilon p_i, & \text{nếu } i = n \end{cases} \quad (5.7)$$

Trong đó, $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ.

Khi đó, theo định lý 5.7 và sử dụng các tính chất của M - ma trận, chúng ta thấy rằng $\nabla F^{(\varepsilon)}$ là M - ma trận, do đó theo mệnh đề (4.1) (i) có nghiệm duy nhất.

Cần lưu ý rằng tất cả các xem xét ở trên, đặc biệt, các mệnh đề 5.5 và 5.6 và định lý 5.7, vẫn có giá trị nếu chúng ta thay thế n bằng một chỉ số tùy ý từ $\{1, \dots, n\}$. Hơn nữa, chúng ta có thể thay thế một chỉ số bằng một tập con tùy ý của $\{1, \dots, n\}$, do đó mở rộng kết quả ở trên.

Mệnh đề 5.8. Giả sử rằng K là bị chặn và tồn tại một chỉ số k sao cho với mọi $p \in K$,

$$\sum_{j=k+1}^n \frac{\partial F_i(p)}{\partial p_j} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (5.8)$$

Cũng giả sử rằng f_j , $j = k+1, \dots, n$, là lỗi mạnh. Khi đó (5.1) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh tương tự như trong định lý 5.7, sử dụng định lý 4.8. Chúng tôi nêu kết quả tương tự trong trường hợp không bị chặn.

Định lý 5.9. Giả sử rằng tồn tại $\delta > 0$ và chỉ số k sao cho với mọi $p \in K$, f_j , $j = k+1, \dots, n$ là lỗi mạnh và

$$\sum_{j=k+1}^n \frac{\partial F_i(p)}{\partial p_j} p_j < -\sigma p_i \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (5.9)$$

Khi đó (5.1) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh.

Cổ định $\gamma \in (0; \delta)$, theo (5.3), (5.4) và (5.9) ta có:

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial F_i(p)}{\partial p_j} p_j - \gamma p_i > \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i(p)}{\partial p_j} p_j \\ = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (5.10)$$

Do đó, $A_k(p) - \gamma I_k$ là M - ma trận.

Theo định lý 4.7 có điều phải chứng minh.

Lưu ý rằng kết quả của mệnh đề 5.8 và định lý 5.9 vẫn đúng nếu chúng ta thay thế tập con $\{1, \dots, k\}$ bởi một tập con tùy ý của $\{1, \dots, n\}$.

6. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã xem xét loại bất đẳng biến phân hỗn hợp là loại trung gian giữa các loại bất đẳng thức biến phân với ánh xạ chi phí đơn giá trị và đa giá trị. Chúng tôi đã thiết lập các kết quả tồn tại và tính duy nhất mới của các bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp theo các giả định khá chung và trình bày mô hình cân bằng kinh tế cạnh tranh hoàn hảo đáp ứng các giả định này.

Chúng tôi cũng đã thu được các kết quả tồn tại và tính duy nhất mới cho bài toán cân bằng kinh tế này. Chúng tôi nhấn mạnh rằng tất cả các kết quả đều tương tự như kết quả cho các bài toán đơn giá trị, nhưng trên thực tế chúng đã thu được đối với các bài toán đa giá trị.

Các kết quả trên cũng cho phép chúng tôi phát triển các phương pháp giải hiệu quả cho các bài toán cân bằng kinh tế như vậy. Ví dụ, chúng ta có thể chuyển đổi bất đẳng thức biến phân hỗn hợp thành bài toán tìm điểm dừng của 1 hàm khả vi liên tục. Do đó, các phương pháp tối ưu hóa thông thường có thể áp dụng cho các bài toán cân bằng kinh tế có chứa ánh xạ nhiều giá trị, hoặc các hàm không trơn. Ngoài ra, nếu ánh xạ chi phí không có thuộc tính loại P chặt có thể được áp dụng ■

TÀI LIỆU THAM KHẢO:

1. C. Baiocchi and A. Capelo. (1984). *Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free Boundary Problems*. New York: Wiley.

2. F. E. Browder. (1966). On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone nonlinear operators in Banach spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 56, 419-425.
3. G. Duvaut and J.-L. Lions. (1972). *Les inéquations en mécanique et en physique, Travaux et Recherches Mathématiques*, no. 21. USA: Dunod.
4. P. T. Harker and J.-S. Pang (1990). Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications. *Math. Programming*, 48(2 - Ser. B), 161-220.
5. I. V. Konnov. (1999). On a class of D-interval functions for mixed variational inequalities. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 43(12), 60-64.
6. Igor Konnov. (2000). Properties of gap functions for mixed variational inequalities. *Siberian J. Numerical Mathematics*, 3(3), 259-270.
7. A. V. Lapin (1999). On iterative methods for mesh variational inequalities. *In book: Iterative Methods for Solution of Linear and Nonlinear Mesh Problems (A. M. Elizarov, ed.)*, 170-211.
8. C. Lescarret. (1965). Cas d'addition des applications monotones maximales dans un espace de Hilbert. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 261, 1160-1163.
9. A. Nagurney. (1999). *Network Economics: A Variational Inequality Approach*. Netherland: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
10. H. Nikaidô. (1968). *Convex Structures and Economic Theory*. New York: Academic Press.

Ngày nhận bài: 4/5/2022

Ngày phản biện đánh giá và sửa chữa: 21/5/2022

Ngày chấp nhận đăng bài: 10/6/2022

Thông tin tác giả:

1. LƯƠNG VĂN LONG¹

2. PHẠM VĂN NGHĨA¹

3. NGUYỄN HỒNG NHẬT¹

4. MAI CẨM TÚ¹

¹ Trường Đại học Kinh tế quốc dân

USING THE INTEGRAL VARIANCE INEQUALITY IN SOLVING ECONOMIC EQUILIBRIUM PROBLEMS

● LUONG VAN LONG¹

● PHAM VAN NGHIA¹

● NGUYEN HONGNHAT¹

● MAI CAM TU¹

¹National Economics University

ABSTRACT:

This paper examines the use of integral variance inequality in economic equilibrium problems in order to establish new existence and uniqueness results of mixed integral variance inequality problems under common assumptions. This paper also presents a perfectly competitive equilibrium model that meets these assumptions. Based on the paper's results, some solutions are proposed to effectively solve economic equilibrium problems.

Keywords: integral variance inequality, economic equilibrium, equilibrium point.